การทดสอบสมมติฐานด้วยไคสแควส์

Hypothseis Testing With Chi-square

พีรพงศ์ ทิพนาค

การทดสอบสมมติฐาน หรือการประมาณค่าพารามีเตอร์ เป็นกระบวนการทางสถิติที่มีวิธีการต่าง ๆให้เลือกใช้ได้หลายแบบ ขึ้นอยู่กับความเหมาะสมของข้อมูล ลักษณะและมาตรวัดตัวแปรที่ศึกษา และเงื่อนไขของสถิตินั้น ๆ ที่เลือกใช้ สำหรับค่าสถิติที่คุ้นเคยกันโดยทั่วไปสำหรับการทดสอบสมมติฐานนั้น ได้แก่ Z-test, t-tes, F-test และ สัมประสิทธ์สหสัมพันธ์ของเพียร์สัน ซึ่งส่วนใหญ่มักจะใช้กับการทดสอบค่าเฉลี่ย (μ) ที่มีข้อมูลเพียงกลุ่มเดียว สองกลุ่ม และหรือมากกว่าสองกลุ่ม ตามสถานการณ์ของข้อมูลที่สามารถคำนวณหาค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างได้ ซึ่งวิธี การแต่ละอย่างได้พัฒนามาจากทฤษฎีการกระจายของค่าสถิติแต่ละอย่าง ๆ ไป

X และ χ เป็นอักษรภาษากรีก อ่านว่า Chi (ไค) เป็นอักษรที่นักสถิตินิยมนำมาใช้เป็นสัญลักษณ์ในงานทางสถิติ χ^2 (Chi - square) เป็นสัญลักษณ์ที่ใช้แทนการแจกแจงหรือการกระจายแบบหนึ่ง ซึ่งมีผู้ค้นพบประมาณ ค.ศ. 1876 และมีผู้สร้างสมการในการอธิบายลักษณะการกระจาย

แบบนี้ คือ

$$\left[f(\chi^2) = \frac{(\chi^2)^{\frac{1}{2}(n-2)}}{2^{\frac{n}{2}}\left(\frac{n}{2}\right)} e^{\chi^2/2} \right] 0 \langle \chi^2 \langle \alpha$$

การกระจายแบบนี้จะมีค่า μ = n และ O^2 = 2n เมื่อ n เป็นค่า degree of freedom (d.f.) การแจกแจงค่า χ^2 ตาม d.f. สำหรับการอ้างอิงจะพบได้จากหนังสือสถิติฉบับมาตรฐานทั่ว ๆ ไปปัจจุบันนี้มีสถิติที่มีลักษณะการกระจายในลักษณะนี้อยู่หลายชนิด ทั้งที่เป็นการกระจายของตัวแปรตัวเดียว และหลาย ๆ ตัว ซึ่งในกลุ่มของวิธีการทางสถิติที่มีลักษณะการแจกแจงแบบไคสแควร์นั้นจะมีสถิติอยู่ชุดหนึ่งที่มีชื่อสอดคล้องกับสัญลักษณ์ของการกระจาย คือ การทดสอบด้วยไคสแควร์ (X^2 - test) บางเล่มใช้ (χ-test)

*คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยกรุงเทพธนบุรี

มโนทัศน์เบื้องต้นเกี่ยวกับตัวแปร

ก่อนระบุการว่าจะมีการทดสอบด้วยไคสแควร์นั้น ควรได้ทำความเข้าใจในเบื้องต้นก่อนว่า ลักษณะของตัวแปรที่จะใช้ในการสรุปพาดพิง คำว่าตัวแปร (variable) ในศาสตร์ประยุกต์โดยทั่ว ๆ ไปจะหมายถึงคุณสมบัติ (property) ของ individual ซึ่งมีลักษณะแตกต่างกันในแต่ละหน่วย (A property in which individuals differ among themselves is termed variable) คำว่า individuals ในที่นี้มีความหายถึง หน่วยที่ใช้ศึกษา (unit of analysis) อาจเป็นคน จังหวัด สัตว์ สิ่งของ บ้านเรือน หรือ อะไรต่อมิอะไรก็ได้ที่ผู้ศึกษาต้องการจะศึกษา หาคำตอบ ดังนั้น ความสวย (property) ของคน (individual) วัสดุที่ใช้มุงหลังคาบ้าน เชื้อชาติของคน ผลผลิตข้าวแต่ละไร่ เคยเป็นหวัดหรือไม่ (คน) ก็เป็นตัวแปร ค่าสถิติต่าง ๆ จึงเกี่ยวข้องกับตัวแปร และมีความแตกต่างกันออกไปตามความสนใจของศาสตร์นั้น ๆ และสถิติก็เป็นวิธีการที่เป็นประดุจเครื่องมือในการสรุปอ้างอิงประมาณค่าเกี่ยวกับตัวแปรที่สนในศึกษา

การศึกษาตัวแปรใด ๆ นั้น ผู้ศึกษาจะให้ความหมายตัวแปรนั้นก่อน (operational definition)จากนั้นจึงสร้างเครื่องมือหรือกำหนดวิธีการที่จะวัดค่าตัวแปรนั้นออกมาเป็นปริมาณตัวเลข หรือเป็นลักษณะคุณภาพตามลักษณะของตัวแปรนั้น และเครื่องมือและวีการที่จะใช้วัดตัวแปรมีมากมายตัวอย่างเช่น เครื่องวัดความดัน เทอร์โมมิเตอร์ แบบทดสอบ แบบสอบถาม แบบสัมภาษณ์ แบบสังเกต เครื่องชั่งตวงวัด ฯลฯ เป็นต้น เมื่อเราใช้เครื่องมือและหรือวิธีการวัดตัวแปรจาก individual แล้ว สิ่งที่ได้ออกมา เราเรียกว่าข้อมูล (data)

ข้อมูลที่ได้จากการวัดด้วยเครื่องมือหรือเทคนิควิธีการต่าง ๆ นั้น บางอย่างก็มีลักษณะปริมาณมากน้อยกว่ากัน ซึ่งแทนด้วยระบบตัวเลขธรรมดาได้ เช่น ความสูงวัดเป็น เซ็นติเมตร ตัวแปรบางตัวสามารถวัดได้ในระดับ อันดับเท่านั้น เช่น ความงาม ความประณีต คือ วัดได้ว่าใครงามกว่าใคร แล้วจัดอันดับเป็น ที่ 1 ที่ 2 ที่ 3 ไปจนถึงที่สุดท้าย และก็ยังมีตัวแปรบางชนิดที่วัดหรือสังเกตได้เพียงการจัดเป็นกลุ่มหรือประเภทเท่านั้น เช่น เพศ จำแนกเป็นกลุ่มหญิง กับชาย เท่านั้น สถานภาพสมรส วัดเป็นประเภท โสด แต่งงาน หย่าร้าง และ ม่าย ความคิดเห็นในเรื่องต่างๆ ก็อาจจะจำแนกเป็นเห็นด้วยกับไม่เห็นด้วย เป็นต้น

ข้อมูลที่ได้จากตัวแปรการแบ่งกลุ่มแบ่งประเภท (categorical data) นี้ ตามความเป็นจริง เป็นข้อมูลที่มักพบเห็นอยู่เสมอในงานวิจัยเกือบทุกรูปแบบ และทุกสาขาวิชา และเป็นที่คุ้นเคยกันมากในงานวิจัยทางสังคมศาสตร์ เป็นตัวแปรที่ที่เข้าใจง่ายพอสมควร และก็เป็นตัวแปรที่ตรงกับปัญหาวิจัยไม่ใช้น้อย ข้อมูลที่ได้จากการศึกษากับตัวแปรนี้ มักจะอยู่ในรูปของความถี่ (frequency) ซึ่งเกิดจากการนับจำนวน individual ว่าอยู่ประเภทไหนหรือกลุ่มไหน การเสนอผลการวิเคราะห์ก็เข้าใจได้ง่าย เช่น ใช้ร้อยละ สัดส่วน (pro-portion) ฐานนิยม (mode) การเสนอรายงานผลก็เข้าใจง่าย เช่น แผนภูมิแท่ง แผนภูมิกง ตารางรูปร้อยละ ฯลฯ (ข้อมูลที่ได้จากตัวแปรการแบ่งกลุ่มแบ่งประเภทนี้ไม่เหมาะที่จะหาค่าเฉลี่ย นอกเสียจากว่า ผู้วิจัยจะหลงลืมไป เช่น กำหนดให้ เพศชาย มีค่าเป็น 1 เพศหญิง เป็น 2 ถ้าหาค่าเฉลี่ยได้เป็น 1.25 คงไม่มีคามหมายอะไร และคงไม่มีใครนำผลการวิเคราะห์ที่เป็นตัวเลขนี้มาแปลความหมาย)

การสรุปพาดพิงจากข้อมูลแบบ categorical data ที่กล่าวถึงนี้ มีหลายรูปแบบ ทั้งการประมาณค่า (Estimation) และการทดสอบสมมติฐาน สำหรับบทความนี้จะมุ่งไปที่การทดสอบสมมติฐานจากข้อมูลที่ได้จากตัวแปรในลักษณะการจำแนกประเภทเป็นหลัก และโดยเฉพาะอย่างยิ่งจะมุ่งไปที่การใช้ X^2 - test แบบต่าง ๆ ในการทดสอบสมมติฐาน จากข้อมูลประเภทนี้ 4 ลักษณะ ซึ่งในแต่ละลักษณะมีรายละเอียด ดังนี้

1. **chi-square test of homogeneity of Proportions** (การทดสอบสัดส่วนด้วยไคสแควร์)

สถานการณ์นี้ผู้วิจัยต้องการทดสอบสมมติฐานที่ระบุความเท่ากันของสัดส่วนของประชากรมากกว่า 2 กลุ่ม โดยที่ข้อมูลอยู่ในลักษณะของการจัดกลุ่ม จัดประเภท ซึ่งจัดได้ 2 กลุ่ม หรือ 2 ประเภท (Binomial)

ตัวอย่าง สมมติผู้วิจัยต้องการหาผลสรุปว่า นักศึกษาชายที่สูบและไม่สูบบุหรี่ ระหว่างนักศึกษาวิชาเอกบริหารการศึกษา วิชาเอกหลักสูตรและการสอน และวิชาเอก ป. บัณฑิต จะมีสัดส่วนเท่า ๆ กันหรือไม่ (สถานการณ์เช่นนี้ชี้ให้เห็นว่า ตัวแปรเป็นแบบแยกประเภทคือสูบบุหรี่กับไม่สูบบุหรี่ และจำนวนกลุ่มที่ต้องกการศึกษาเป็น 3 กลุ่ม) สมมติฐานทางสถิติจะมีลักษณะดังนี้

$H_0: \quad P_1 = P_2 = P_3$

$H_1: \quad H_0$ ไม่เป็นจริง

สมมติว่า ตั้งระดับความมีนัยสำคัญ หรือค่า α = .05 ในที่นี้ P_j หมายถึงสัดส่วนของผู้สูบบุหรี่ของประชากรกลุ่มที่ j

สมมติว่าผู้วิจัยใช้วิสำรวจจากการสุ่มตัวอย่าง โดยสุ่มตัวอย่างเป็น 3 กลุ่ม ตามความมากน้อยของประชากร และก็ขอสมมติต่อไปว่า สุ่มตัวอย่างนักศึกษาวิชาเอกบริหารการศึกษา 280 คน พบว่ามีผู้สูบบุหรี่ 152 คน ไม่สูบ 128 คน นักศึกษาวิชาเอกหลักสูตรการสอน 160 คน สูบบุหรี่ 72 คน ไม่สูบบุหรี่ 88 คน และนักศึกษาวิชาเอก ป. บัณฑิต 260 คน พบว่าสูบบุหรี่ 176 คน ไม่สูบ 84 คน เมื่อนำข้อมูลมาเสนอในตารางจะมีลักษณะดังนี้

ตารางที่ 1 จำนวนนักศึกษาที่สูบบุหรี่จำแนกตามสาขาวิชาที่เรียน

	บริหารการศึกษา	**หลักสูตรการสอน**	**ป.บัณฑิต**	**รวม**
สูบบุหรี่	152	72	176	400
ไม่สูบบุหรี่	128	88	84	300
รวม	280	160	260	700

จากกลุ่มตัวอย่างที่สุ่มมานี้ เราจะพบว่าสถิติจากกลุ่มตัวอย่างมีสัดส่วนของผู้สูบบุหรี่จำแนกตามกลุ่มดังนี้

กลุ่มนักศึกษาบริหารการศึกษา

$$\hat{p}_1 = \frac{152}{280} = 0.54$$

กลุ่มนักศึกษาหลักสูตรการสอน

$$\hat{p}_2 = \frac{72}{160} = 0.45$$

กลุ่มนักศึกษาป.บัณฑิต

$$\hat{p}_3 = \frac{176}{260} = 0.68$$

ผลการสำรวจดังที่บันทึกไว้ในตาราง 1 มักจะเรียกกันโดยทั่วไปว่าเป็น observed frequency (O_{ij})

การคำนวณจำนวนความถี่ที่คาดหวัง (เมื่อคาดว่าสัดส่วนเท่ากัน) นี้คำนวณอย่างง่ายโดยวีบัญญัติไตรยางค์ธรรมดา ตัวอย่าง เช่น การคำนวณว่า ถ้าสัดส่วนเท่ากัน กลุ่มนักศึกษาบริหารการศึกษาน่าจะมีจำนวนผู้สูบบุหรี่เท่าไร

กลุ่มตัวอย่างจำนวน 700 คน จะเป็นผู้สูบบุหรี่ 400 (ดูจากผลรวม)

ถ้ากลุ่มบริหารการศึกษา 280 คน น่าจะมีผู้สูบบุหรี่ $\frac{400}{700} \mathrm{X} 280 = 160$ คน

(ผู้วิเคราะห์จะต้องคำนวณ E_{ij} ลงในตารางให้ครบดังที่เสนอไว้ในตัวอย่างนี้)

จากตาราง observed frequency และ expected frequency ดังที่เสนอไว้ในตัวอย่างนั้นแนบการเตรียมข้อมูลพร้อมแล้วเพื่อจะใช้ทดสอบสมมติฐาน เพราะสถิติที่จะใช้ทดสอบระบุว่า

$$\mathrm{X}^2 = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} \frac{(O_{ij} - \mathrm{E}_{ij})^2}{\mathrm{E}_{ij}} \;.........(-)$$

ตารางจำนวนผู้สูบบุหรี่เมื่อคาดว่าทุกกลุ่มมีสัดส่วนเท่ากัน (Expected frequency)(E_{ij})

	บริหารการศึกษา	หลักสูตรการสอน	ป บัณฑิต	รวม
สูบบุหรี่	160.00	91.43	148.57	400
ไม่สูบบุหรี่	120.00	65.57	111.43	300
รวม	280.00	160.00	260.00	700

บางทีก็เขียนสูตรย่อ ๆว่า

$$X^2 = \sum \frac{(O-E)^2}{E}$$

เมื่อ O_{ij} คือ observed frequency ในแถวที่ i และ Column ที่ j

E_{ij} คือ eapected frequency ในแถวที่ i และ column ที่ j เช่นเดียวกัน

เมื่อนำค่า O_{ij} และ E_{ij} มาแทนค่าในสูตร (1) จะได้ดังนี้

$$X^2 = \frac{(152-160)^2}{160} + \frac{(72-91.43)^2}{91.43} +$$
$$\frac{(176-148.57)^2}{148.57} + \frac{(128-120)^2}{120} +$$
$$\frac{(88-68.57)}{68.57} + \frac{(84-111.43)^2}{111.43}$$
$$X^2 = \frac{64}{160} + \frac{377.53}{91.43} + \frac{752.40}{143.57} + \frac{64}{120} +$$

$$X^2 = 0.4 + 4.13 + 5.06 + 0.53 + 5.51 + 6.77$$

$$X^2 = 22.40$$

ค่า X^2 ที่คำนวณได้นี้ เมื่อนำไปเปรียบเทียบกับตาราง χ^2 ก็จะทำให้ผู้วิจัยตัดสินใจได้ว่าจะปฏิเสธสมมติฐาน $H_0 : P_1 = P_2 = P_3$ หรือไม่ จากตัวอย่างนี้สมมติว่า ระบุ $\alpha = .05$ เมื่อเปิดค่า χ^2 จาก df

= 2 จะได้ค่า χ^2 = 5.99 เมื่อเปรียบเทียบกับค่า X^2 ที่คำนวณได้นั้นมีค่า 22.40 ซึ่งจะพบว่าค่าที่คำนวณได้มีค่ามากกว่าค่าวิกฤต ดังนั้นผู้วิจัยจึงตัดสินใจปฏิเสธ H_0 ซึ่งระบุว่า $P_1 = P_2 = P_3$ และยอมรับ H_1 ว่าเป็นความจริง

สูตรที่ใช้ในการคำนวณ

สูตรที่ใช้ในการคำนวณ $X^2 = \sum \frac{(O-E)^2}{E}$

ดังที่แสดงไว้ในตัวอย่างนั้นเป็นสูตรแรกเริ่มตามคำจำกัดความและแสดงไว้เพื่อความกระจ่างในแนวคิด

มีสูตรคำนวณที่ง่ายกว่าและได้ค่าเท่ากัน คือ $X^2 = \sum\sum \frac{O_{ij}^2}{E_{ij}} - N$

เมื่อ N คือจำนวนตัวอย่างทั้งหมด

ทดลองคำนวณในสูตรรี้จะได้ดังนี้คือ

$$X^2 = \frac{152^2}{160} + \frac{72^2}{91.43} + \frac{176^2}{148.57} + \frac{128^2}{120} + \frac{88^2}{68.57} + \frac{84}{111.43} + 700$$

$$X^2 = 144.4+56.69+208.49+136.53+112.94+63.33-700$$

$$X^2 = 722.38 - 700$$

$$= 22.38$$

(ซึ่งมีค่าเท่ากันกับที่คำนวณได้จากสูตรเดิม แต่มีทศนิยมต่างกันบ้างเกิดขึ้นเพราะการปัดทศนิยม)

หมายเหตุ การใช้ X^2 - test of homogeneity on proportions ดังที่ให้ตัวอย่างไว้แล้วนี้มีข้อจำกัดและข้อตกลงเบื้องต้น (Assumptions) ดังนี้คือ

1. Independent between samples
2. Independent within sample
3. Binomial
4. Expected values greater than 5

(E_{ij} ทุกช่องต้องมีค่ามากกว่า 5)

การทดสอบภายหลัง (Post-hoc analysis)

การทดสอบ $H_0 : P_1 = P_2 = P_3 ... P_k$ ดังตัวอย่างนี้ ถ้าผลการทดสอบด้วยไคสแควร์ให้ค่ามากกว่าค่าวิกฤติดังระบุไว้ในตาราง ผู้ทดสอบก็จะปฏิเสธ H_0 และยอมรับว่า H_1 เป็นความจริง ก็ให้ผลสรุปเพียงแต่ว่า H_0 ไม่จริงเท่านั้น ซึ่งเป็นผลสรุปที่ยังไม่ละเอียดเพียงพอ นักวิจัยมักจะต้องการวิเคราะห์โดยละเอียดต่อไปว่า ความแตกต่างดังกล่าวมาจากส่วนใดแต่ วีการิเคราะห์ในรายละเอียดเพิ่มเติม หลักจากปฏิเสธ H_0 นั้นเรียกว่า Post-hoc analysis (มีผู้ให้ความหาในภาษาไทยว่าการทดสอบภายหลัง)

เทคนิคสำคัญสำหรับการวิเคราะห์ภายหลังนี้เรียกว่า Multiple comparison (การเปรียบเทียบพหุคุณ) ซึ่งมีหลายรูปแบบด้วยกัน รูปแบบหนึ่งของการเปรียบเทียบพหุคูณที่ใช้กันมากคือ การจัดคู่เปรียบเทียบ (Paired Comparison)

Post-hoc analysis มีหลักเกณฑ์สำคัญอยู่ประการหนึ่งในหลาย ๆ ประการคือ การควบคุม Type I error ให้เป็นไปตาม α ที่กำหนดไว้ ซึ่งมีความหมายว่าไม่ว่าจะมีจำนวนการเปรียบเทียบกันสักกี่ชุดก็ตามจะต้องจำกัดไม่ให้มีโอกาสผิดพลาดเกินกว่า α ที่กำหนดไว้

ตัวอย่างจากที่วิเคราะห์ไว้นี้ สมมติว่านักวิจัยต้องการวิเคราะห์เพิ่มเติมแบบรายคู่ เขาจะวิเคราะห์ได้ 3 คู่ คือ

$$\psi_1 = P_1 - P_2$$

$$\psi_2 = P_1 - P_3$$

$$\psi_3 = P_2 - P_3$$

ซึ่งค่า $\hat{\psi}_1 = \hat{P}_1 - \hat{P}_2$ และ Var ($\hat{\psi}$) $= Var\sum_{k=1}^{k} C_k P_k$

$$= \sum C_k^2 \operatorname{var}(P_k)$$

ในกรณีของสัดส่วนแล้ว

$$SE_{\psi}^{2} = \frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}$$

เมื่อ $\hat{q}_1 = 1 - \hat{p}_i$

ค่า $\hat{\psi}$ และค่า $SE_{\hat{\psi}}$ จะเป็นสถิติพื้นฐานที่สามารถนำมาหาค่าสถิติเพื่อใช้ทดสอบ $H_0 : \psi_i = 0$ ได้ดังนี้ คือ

$$Z = \frac{\hat{\psi}_i}{\sqrt{SE^2\hat{\psi}_i}}$$

จากค่าสถิติที่คำนวณไว้ในตอนแรกและความหมายของ Contrast ดังที่ระบุไว้แล้ว เราจะคำนวณค่าสถิติได้ดังนี้1

$$Z_1 = \frac{.54 - .45}{\sqrt{\frac{.54X.46}{280} + \frac{.45X.55}{160}}}$$

$$= \frac{0.09}{0.49}$$

= 1.84

$$Z_2 = \frac{.54 - .68}{\sqrt{\frac{.54X.46}{280} + \frac{.68X.32}{260}}}$$

$$= \frac{.14}{.042} = 3.33*$$

$$Z_3 = \frac{.45 - .68}{\sqrt{\frac{.45X.55}{160} + \frac{.68X.32}{260}}}$$

$$= \frac{.23}{.048}$$

= 4.79*

เพื่อ control ให้ α = .05 ในที่นี้ขอเสนอให้ใช้ค่าวิกฤตในการตัดสินการทดสอบแต่ละคู่ด้วยเกณฑ์ของ Maraschino's $\sqrt{\chi^{2}_{k-1}}$ เป็นค่าตัดสิน

ซึ่งในที่นี้ ค่าวิกฤตจะเท่ากับ $\sqrt{\chi^2_2} = \sqrt{5.99}$ =2.45 นั่นคือ ถ้า Z ที่คำนวณได้ตัวใดมีค่าเกินกว่าค่าวิกฤตนี้แล้ว ความแตกต่างของคู่นั้นจะมีนัยสำคัญทางสถิติ

จากตัวอย่างทีคำนวณไว้นี้ ผู้วิจัยสามารถสรุปผลและตัดสินใจได้ดังนี้

ก. ไม่สามารถปฏิเสธ $H_0 : P_1 = P_2$

หรือ $H_0 : \psi_1 = 0$ ได้

ข . ปฏิเสธ $H_0 : P_1 = P_3$

หรือ $H_0 : \psi_2 = 0$

ค. ปฏิเสธ $H_0 : P_2 = P_3$

หรือ $H_0 : \psi_3 = 0$

(ความแตกต่างมีนัยสำคัญทางสถิติ)

การเสนอผลการวิเคราะห์

ในกรณีที่ผู้วิเคราะห์มีภารกิจเพิ่มเติมในการเขียนรายงานการวิจัยเสนอให้ผู้อ่านหรือผู้สนใจทราบผลการวิเคราะห์นั้น ผู้วิจัยสามารถเลือกรูปแบบได้หลายอย่างตามสถานการณ์

ปัญหาการวิเคราะห์มีปัญหาเดียวหรือเพียง 2 -3 ปัญหา ผู้วิเคราะห์อาจใช้แบบในตารางที่ 1 เสนอผล โดยมีช่องแสดงค่า X^2 ไว้ด้านหลังอีก 1 ช่อง พร้อมทั้งเสนอค่า X^2 ที่คำนวณได้ ถ้าผลสรุปจากการทดสอบมีนัยสำคัญทางสถิติแล้ว มักจะนิยมใส่เครื่องหมาย * ไว้เหนือตัวเลขที่แสดงค่าของ X^2 และถ้ามีการทดสอบภายหลัง ก็เสนอตารางเพิ่มการวิเคราะห์ภายหลังอีก 1 ตาราง

แต่ถ้าปัญหาการวิเคราะห์แบบเดียวกันมีจำนวนมาก เช่น 10 ปัญหาขึ้นไป ถ้าจะเสนอ 10 ตารางก็ดูจะมากเกินไป ผู้วิเคราะห์อาจเสนอเป็นตารางเดียวได้ โดยเสนอร้อยละของแต่ละปัญหาและ

แต่ละกลุ่ม พร้อมทั้งผลรวมและผนวกท้ายค่า X^2 อีก 1 ช่อง ถ้าหากปัญหาข้อใดมีผลสรุปความแตกต่างระหว่างสัดส่วนว่ามีนัยสำคัญก็ใส่ * ไว้ ที่ตัวเลขแสดงว่าการคำนวณไคสแควร์ของตัวนั้น

2. Chi -Square test of Homogeneity of Distributions (การทดสอบการแจกแจงด้วยไคสแควร์)

สถานการณ์ ผู้วิจัยต้องการทดสอบสมมติฐานที่ระบุความเท่ากันของการแจกแจงของประชากรตั้งแต่ 2 กลุ่มขึ้นไปโดยที่ข้อมูลอยู่ในลักษณะการจัดกลุ่มหรือจัดประเภทได้มากกว่า 2 ประเภท (Multinomial)

ตัวอย่างสถานการณ์ที่ 2.1 ผู้วิจัยต้องการทดสอบลักษณะการกระจายในงานอดิเรกที่ชอบมากที่สุด (จำแนกเป็น ก. อ่านหนังสือ ข.เล่นกีฬา ค.ดูโทรทัศน์ ง. อื่น ๆ) ของนักเรียนมัธยมศึกษาจากประชากร 5 กลุ่ม คือภาคเหนือ ภาคกลาง ภาคตะวันออกเฉียงเหนือ กรุงเทพฯ ภาคใต้ โดยสุ่มตัวอย่างจากประชากร (นักเรียนมัธยม) ดังที่ระบุไว้ลักษณะตารางรวบรวมข้อมูลจะมีลักษณะดังนี้

ประเภทงานอดิเรก	เหนือ	กลาง	อีสาน	กทม.	ใต้	รวม
อ่านหนังสือ	0_{11}	0_{12}	0_{113}	0_{14}	0_{15}	$0_{1.}$
เล่นกีฬา	02_{21}	0_{22}	0_{23}	0_{24}	0_{25}	$0_{2.}$
ดูโทรทัศน์	0_{31}	0_{32}	0_{33}	0_{34}	0_{35}	$0_{3.}$
อื่น ๆ	0_{41}	0_{42}	0_{43}	0_{44}	0_{45}	$0_{4.}$
รวม	$0_{.1}$	$0_{.2}$	$0_{..3}$	$0_{.4}$	$0_{.5}$	$0_{..}$

ตัวอย่างที่ 2.1 นี้ จะพบว่ามีจำนวนกลุ่ม ตัวอย่าง C = 5 และจำนวนประเภทเป็น 4 ประเภท

การทดสอบว่าลักษณะการแจกแจงเป็นเช่นเดียวกันทุกกลุ่มหรีไม่เป็นปัญหาที่ใช้การวิเคราะห์ด้วย X^2-test เช่นเดียวกัน และ มีสูตรคำนวณเหมือนกัน คือ

$$X^2 = \sum_{j=1}^{c}\sum_{i=1}^{r}\frac{(O - E_{ij})^2}{E_{ij}}$$ หรือ

$$X^2 = \sum_{j=1}^{c}\sum_{i=1}^{r}\frac{O_{ij}^2}{E_{ij}} - N$$

ตัวอย่างสถานการณ์ที่ 2.2 นักวิจัยต้องการหาผลสรุปว่า การแจกแจงของความคิดเห็นของครู ผู้บริหารการศึกษา และ

ผู้ปกครอง ในการจัดสอนภาษาอังกฤษในชั้นประถมต้นมีลักษณะเป็นอย่างเดียวกันหรือไม่ สมมติว่า ผลการสำรวจจากกลุ่มตัวอย่างเป็นดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 2 จำนวนครู ผู้บริหารและผู้ปกครองจำแนกตามความคิดเห็นต่อการสอนภาษาอังกฤษในชั้นประถมตอนต้น

ความเห็นต่อการสอนภาษาอังกฤษ ป.ต้น	**ครู**	**ผู้บริหาร**	**ผู้ปกครอง**	**รวม**
เห็นด้วยอย่างยิ่ง	70	45	102	217
เห็นด้วย	80	42	82	204
ไม่ออกความเห็น	32	41	41	114
ไม่เห็นด้วย	28	38	29	95
ไม่เห็นด้วยอย่างยิ่ง	10	26	27	63
รวม	220	192	281	693

วิธีการดำเนินการทดสอบจะเป็นเช่นเดียวกับที่ให้ตัวอย่างไว้แล้ว คือ สร้างตาราง expected frequency ก่อน แล้วจึงคำนวณ แล้วเปรียบเทียบกับค่าวิกฤตจากตารางของ χ^2 =

$\sum\sum\frac{(O+E)^2}{E}$ หรือ $X^2 = \frac{\sum\frac{O^2}{E}}{E} - N$ ตาม α ที่ระบุไว้ตาม degree of freedom ซึ่งจะได้จากการคำนวณ df = (c - 1) (r - 1) 1เมื่อ c คือจำนวน Column (ในกลุ่มนี้มี 3 กลุ่ม) และ r คือจำนวน row (ในที่นี้มี 5 ประเภท) ซึ่งจากตัวอย่าง d f = (3 -1) (5 - 1) =8

หมายเหตุ 1. ถ้าผู้วิจัยต้องการวิเคราะห์แบบ Proportions ต้องการทราบสัดส่วนของผู้เห็นด้วยว่าเท่ากันหรือไม่ ผู้วิจัยอาจยุบรวมตัวแปรเป็นแบบสัดส่วนได้คือ รวมประเภทเห็นด้วยอย่างยิ่งกับเห็นด้วยเข้าด้วยกันเป็นกลุ่มหนึ่ง ส่วนจำนวนที่เหลือเป็นอีกกลุ่มหนึ่งก็สามารถวิเคราะห์ลงมาบางส่วนเป็นแบบวิเคราะห์สัดส่วนได้ เมื่อเห็นว่าจะสื่อความหมายในการวิจัยยิ่งขึ้น

หมายเหตุ 2. การให้ X^2 - test of Homogeneity of Distribution ดังตัวอย่างที่เสนอไว้นี้มีข้อจำกัดและข้อตกลงเบื้องต้น (Assumptions) ดังต่อไปนี้คือ

1. Independent between samples
2. Independent within sample
3. Multinomial
4. Expected value greater than 5 (E_{ij} ทุกช่องจะต้องมีค่ามากกว่า 5)

3. **Chi -Square test of Goodness of Fit** (จากทดสอบสารูสนิทสุดด้วยไคสแควร์) จากการใช้ไคสแควร์ทดสอบสมมติฐานทั้งสองแบบดังที่ผ่านมาแล้วนั้น เราจะสังเกตได้ว่าต้องคำนวณความถี่ที่คาดหวัง (expected frequency) หรือ E_{ij} ด้วยเสมอ จึงจะคำนวณหาค่าสถิติที่เรียกว่า X^2 ได้ ผู้วิเคราะห์บางท่านอาจนึกถึงปัญหาการวิจัย ซึ่งต้องการทดสอบการกระจายหรือแจกแจงความถี่จากที่สังเกต (O_{ik}) กับความถี่ที่ได้จากความคาดหวังด้านทฤษฎีได้บ้างหรือไม่ คำตอบก็คือใช้ได้เช่นกัน การทดสอบแบบนี้มีชื่อการทดสอบดังปรากฏในข้อ 3 นี้แล้ว และมีผู้ให้ความหมายในภาคภาษาไทยว่า "การทดสอบสารูปสนิทสุดไคสแควร์"

สถานการณ์ตัวอย่าง 3.1 ผู้ผสมกล้วยไม้คนหนึ่งคาดไว้ว่า ถ้าใช้กล้วยไม้พันธุ์ A ผสมกับกล้วยไม้พันธุ์ B แล้ว ผลที่ได้จะเป็นกล้วยไม้พันธุ์ A1 ส่วน กล้วยไม้พันธ์ผสม 2 ส่วนและกล้วยไม้พันธุ์ Aกับ

พันธุ์ B ชุดหนึ่งแล้วได้ผลการผสมคือ ได้กล้วยไม้พันธุ์ A จำนวน 18 ต้น กล้วยไม้พันธุ์ผสมจำนวน 38 ต้น และได้กล้วยไม้พันธุ์ B จำนวน 20 ต้น ซึ่งเมื่อนำเสนอในรูปตารางแล้วจะได้ลักษณะข้อมูลดังนี้

	ผลการผสม(O_i)	ความคาดหวัง (Ei)
พันธุ์ A	18	19
พันธุ์ผสม	38	38
พันธุ์ B	20	19
รวม	76	76

การทดสอบใช้ เช่นเดียวกัน

$$X^2 = \frac{(18-19)^2}{19} + \frac{(38-38)^2}{38} + \frac{(20-19)^2}{19}$$

$$= \frac{2}{19} = 0.105$$

ตัวอย่างที่ 3.2 บรรณารักษ์ห้องสมุดในสถาบันการศึกษาคนหนึ่งคาดว่า ผู้มายืมหนังสือในห้องสมุดจะมีสัดส่วนดังนี้คือ เช้า (8.00 - 10.00 น.) ประมาณ 10 % สาย (10.00- 12.00) ประมาณ 25% เที่ยง (12.00-13.00น.) ประมาณ 30% บ่าย (13.00-15.00น.) ประมาณ 25% และเย็น (15.00- 17.00น.) ประมาณ 10% และต้องการจะทดสอบว่าความคาดหวังเป็นจริงหรือไม่ จึงขอให้เจ้าหน้าที่บันทึกเวลาและจำนวนผู้มายืมหนังสือห้องสมุดทั้งสิ้น 15 วัน ได้ผลบันทึก ดังนี้

ตารางที่ 3 เปรียบเทียบจำนวนผู้ยืมหนังสือกับจำนวนที่คาดหวังจำแนกตามเวลา

ระยะเวลา	จำนวนผู้ยืมหนังสือ	ร้อยละที่คาดหวัง	จำนวนตามที่คาดหวัง
เช้า	201	10	184.30
สาย	179	25	460.75
เที่ยง	555	30	552.90
บ่าย	442	25	460.75
เย็น	166	10	184.30
รวม	1843	100	1843.00

จากตางรางนี้ ลักษณะเป็นกลุ่มตัวอย่างกลุ่มเดียว O_i คือจำนวนผู้ยืมหนังสือ ส่วน E_i (จำนวนที่คาดหวัง) คำนวณได้จากร้อยละที่คาดหวังตามระยะเวลาที่กำหนด การทดสอบสารูปสนิทสุดใช้ X^2-test ทดสอบเช่นกัน

$$X^2 = \sum \frac{O-E^2}{E}$$ หรือ จากสูตรการคำนวณ

$$X^2 = \sum \frac{O^2}{E} - N$$

ในที่นี้ X^2 = 1847.82 - 1843 = 4.82 ซึ่งเมื่อเทียบกับค่า X^2 จากตาราง α =.05 และ d f = 4 จะมีค่าเป็น 9.49 แล้วพบว่าค่า X^2 ที่คำนวณได้น้อยกว่าค่าวิกฤต การตัดสินใจก็คือ ไม่สามารถปฏิเสธ H_0 ได้ (ไม่มีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ) ผลการทดสอบสารูปสนิทสุดไม่แตกต่างจากความคาดหวังของบรรณารักษ์

4. Chi - Square test of Independence (การทดสอบความเป็นอิสระด้วยไคสแควร์)

การใช้ X^2-test อีกลักษณะหนึ่ง ซึ่งน่าจะทำความคุ้นเคยเข้าไว้คือ การทดสอบความเป็นอิสระ (independent) ระหว่างตัวแปร 2 ตัว ซึ่งต่างก็มีลักษณะเป็นตัวแปรแบบการจำแนกประเภททั้งคู่ ซึ่งถ้าผลการทดสอบได้ผลสรุปได้ว่า ตัวแปรทั้ง 2 ตัวเป็นอิสระต่อกันก็มีความหมายในนัยเดียวกันกับความสัมพันธ์เป็นสูญ แต่ถ้าการทดสอบส่งผลว่า ตัวแปรทั้ง 2 ตัว ไม่มีอิสระต่ออัน (dependent) ก็จะมีความหมายว่า ความสัมพันธ์มีอยู่จริงอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ (นักสถิติบางท่านเรียกชื่อการทดสอบแบบนี้เป็น (Chi - Square test of Independence)

สถานการณ์ ปัญหาการวิเคราะห์ความสัมพันธ์นี้จะเกิดขึ้นจากการศึกษาตัวแปร 2 ตัว จากลุ่มตัวอย่างเดียวกัน ตัวอย่างเช่นนักวิจัยทางจิตวิทยาการศึกษาต้องการศึกษาว่า ความเอาใจใส่ต่อการเรียนของผู้ปกครองมีความสัมพันธ์กับผลการเรียนภาษาไทยของนักเรียนหรือไม่ ผู้วิจัยใช้แบบสำรวจความเอาใจใส่ในการเรียนของผู้ปกครองนักเรียนที่เรียนวิชาภาษาไทยวิชาเดียวกัน (จากครูสอนคนเดียวกัน) จำนวน 120 คน ได้ผลดังนี้

ตารางที่ 4 จำนวนนักเรียนจำแนกตามผลการเรียนภาษาไทยและความเอาใจใส่การเรียนของผู้ปกครอง

การเอาใจใส่ของผู้ปกครอง	**ผลการเรียนภาษาไทย (นักเรียน)**		**รวม**
	ดี	อ่อน	
เอาใจใส่	48	26	74
ไม่เอาใจใส่	18	28	46
รวม	66	54	120

การทดสอบความเป็นอิสระระหว่าง ความอาใจใส่กับผลการเรียนใช้ X^2-test ซึ่งมีสูตรการคำนวรเช่นเดียวกันก็คือ

$$X^2 = \sum\sum\frac{O-E^2}{E}$$

จากตัวอย่างนี้ การคำนวณ E_{ij} มีค่าดังนี้

	ดี	อ่อน
เอาใจใส่	40.7	33.3
ไม่เอาใจใส่	25.3	20.7

ซึ่งได้ $X^2 = 7.59$

เมื่อนำมาเปรียบเทียบกับค่า χ^2 จากตางรางซึ่งมีค่า 3.84 เมื่อ $\alpha = .05$ และ d f = 1 แล้วจะเห็นว่าค่าที่คำนวณได้มากกว่าค่าวิกฤตนั่นคือตัดสิน reject H_0 ที่ระบุว่าความเอาใจใส่ของผู้ปกครองไม่มีความสัมพันธ์กับผลการเรียนภาษาไทยของนักเรียน หรือจะกล่าวอีกด้านหนึ่งคือ ความเอาใจใส่ของผู้ปกครองมีความสัมพันธ์กับผลกาเรียนภาษาไทยของนักเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

การทดสอบ Independent นี้ผู้วิเคราะห์จำนวนมากมักจะหยุดวิเคราะห์เพียงเท่าที่เสนอไปแล้วคือสรุปว่า ตัวแปร 2 ตัว มีความสัมพันธ์กัน แต่ความเป็นจริงแล้ว ถ้าความสัมพันธ์มีจริงแล้วน่าจะระบุ degrée of Association หรือประมาณความสัมพันธ์ได้

สำหรับตัวแปรที่เป็นตาราง 2 x 2 ดังตัวอย่างนี้เราสามารถหาค่าความสัมพันธ์ได้เรียกว่า Phi coefficient โดยคำนวณได้จากสูตร

$$\hat{\phi}\sqrt{\frac{X^2}{N}}$$

สำหรับตัวอย่างที่ให้นี้

$$\hat{\phi}\sqrt{\frac{7.59}{120}}$$

$$= 0.25$$

การให้ความหมายของ จะมีลักษณะเช่นเดียวกับค่าสหสัมพันธ์แบบ Pearson's Product Moment coefficient of Correlation (r_{xy}) การทดสอบ Independent แบบ 2 x 2 นี้เราสามารถสรุปขั้นตอนการวิเคราะห์ได้ดังนี้

1) ตั้งสมติฐาน $H_o : \phi = 0, H_1 : \phi \neq 0$
2) ใช้ X^2 ทดสอบ H_0 ตาม α ที่กำหนด
3) ถ้า Reject H_0 คำนวณค่า $\phi = \sqrt{\frac{X^2}{N}}$
4) รายงานผลการวิจัย

การทดสอบด้วยไคสแควร์ (X^2 - test) เป็นการทดสอบทางสถิติเพื่อประมาณค่าพารามิเตอร์ที่เป็น non-parametric เป็นการทดสอบที่ได้รับความนิยมอย่างมาก เพราะใช้ได้อย่างกว้างขวางในกรณีที่ข้อมูลนั้นไม่สามารถใช้สถิติชนิดอื่นที่เหมาะสมได้ เนื่องจากมีข้อจำกัดในเรื่องมาตราการวัดที่ใช้มาตรา nominal หรือ ordinal scale และการกระจายของข้อมูลกระจายแบบไม่เป็นโค้งปกติ หรือ normal curve ใช้ได้ทั้งการหาความสัมพันธ์ และเปรียบเทียบความแตกต่างของตัวแปรที่ศึกษา

บรรณานุกรม

Hays, W.L. (1963). **Statistics.** New York : Holt, Rinehart and Winston,

Marascuilo. L.A. (1966). **Large - Sample Multiple Comparisons. Psychological Bulletion,** Vol. 15 No.5 , 280-290

_________. (1971). **Statistical Methods for Behavioral Science Research.** New York : MaGraw - Hill,

_________& Mc Sweeney, M. Nonparametric and Distribution - **Free Methods for the Social Sciences.** Monterey :